שיעור שלישי

פרק 2: רציפות, משפט ערך הביניים

מבוא

בשיעור זה נשתמש במושג הגבול שהגדרנו בשיעור הקודם, על מנת להגדיר מושג מרכזי נוסף: רציפות של פונקציה. לאחר מכן נלמד משפט חשוב אודות פונקציות רציפות – משפט ערך הביניים.

רציפות

נקרא ב**יחידות הלימוד עמ' 126-131** ונתוודע להגדרת **רציפות** של פונקציה בנקודה, ורציפות של פונקציה בקטע.

משפט 2.7.3 הוא האנלוג למשפט האריתמטיקה של גבולות עבור פונקציות רציפות. הוא מציין כי סכום, הפרש, כפל ומנה של פונקציות הרציפות בנקודה c, אף הם רציפים - כשבמקרה של מנה כרגיל עלינו לוודא כי הפונקציה במכנה שונה מ- 0 בנקודה c (במקרה זה, מובטח לנו כי המנה אינה רציפה – שכן אם במנה f/g מתקיים g(c)=0 הרי הפונ' f/g כלל לא מוגדרת ב- 0 ולכן לא מקיימת את התנאי הראשון לרציפות)

ומה לגבי הרכבה? כרגיל, כשמדברים על הרכבות העניינים קצת יותר מורכבים, משפט 2.7.6 נותן לנו תנאי נוח לבדוק האם הרכבת של 2 פונקציות $f \circ g$ רציפה בנקודה c:

משפט 2.7.6
אם g (הפונקציה הפנימית) רציפה ב- c ו- f רציפה ב- $g(c)$ אז $f \circ g$ רציפה ב- c.

דרישות המשפט הגיוניות. בחישוב $f \circ g$ תחילה אנו מחשבים את g לכן התנאי ש- g רציפה בנקודה c הגיוני, כשלב שני אנו מחשבים את f על התוצאה, כלומר על ערכים בסביבת $g(c)$ ולא בסביבת c המקורי שהתחלנו איתו, לכן המשפט דורש רציפות של f בנקודה $g(c)$.

חשוב לשים לב שזהו משפט חד כיווני. אם מתקיימים תנאיו, נוכל להסיק כי $f \circ g$ רציפה ב- c, אך לא ניתן להסיק מכך שתנאי המשפט לא מתקיימים כי $f \circ g$ אינה רציפה ב- c, כפי שמלמדת הדוגמה הבאה:

דוגמה נגדיר $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $f(x) = x^2$, ונתבונן על $f \circ g$ בנקודה 0.

הפונ' f,g אינן מקיימות את תנאי משפט 2.7.6 בנקודה 0, שכן g (הפונקציה הפנימית) אינה רציפה ב- 0 (בתרגיל 1 בשיעור 2 הראנו שאין ל- g גבול בנקודה 0, לכן g אינה מקיימת את התנאי השני לרציפות ב- 0).

עם זאת, הפונ' $f \circ g$ היא הפונקציה הקבועה 1. אכן, לכל x, הפעלת הפונקציה הפנימית g תיתן תוצאה שהיא או 1 או 1- בהתאם לטלאי, וכעת שנפעיל את f על התוצאה נקבל במקרה הראשון $1^2 = 1$ ובמקרה השני $(-1)^2 = 1$, כלומר בכל מקרה $(f \circ g)(x) = 1$.
כיוון ש- $(f \circ g)(x) = 1$ הרי היא רציפה לכל x ובפרט ל- $x = 0$. ראינו לפיכך g לא רציפה ו- f רציפה כך ש- $(f \circ g)$ רציפה. ■

תרגיל

מצאו g רציפה ב- c ו- f שאינה רציפה ב- $g(c)$ כך ש- $f \circ g$ רציפה ב- c.
(תוכלו למשל להפוך את תפקידי f, g בדוגמה שנתנו, מצאו את ההרכבה והיווכחו כי היא רציפה.)

■

תרגיל 1

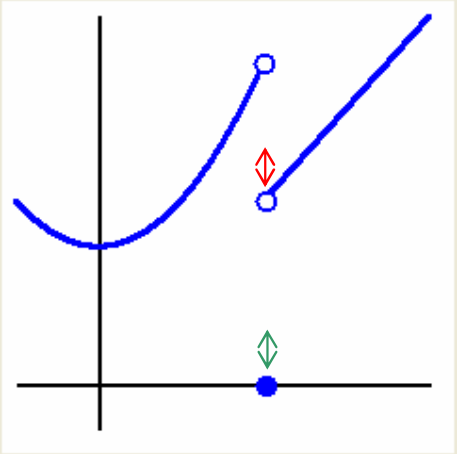
נגדיר:
$$f(x)=\begin{cases} 2x+A & x>2 \\ x^2+3 & x<2 \\ B & x=2 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי A ו- B: א) יש ל- f גבול בנקודה 2?
ב) f רציפה ב- **R** (כלומר לכל המספרים)?

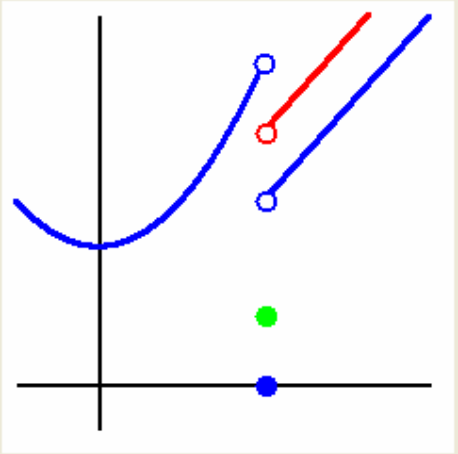
פתרון 1

<u>סעיף א'</u>: נתבונן על הגרף של הפונקציה f כדי לקבל אינטואיציה ראשונית לפתרון. בתיאור הפונקציה f קיימים 2 פרמטרים שצריך למצוא B,A, על מנת לצייר נבחר שרירותית A=B=0:

גרף הפונקציה עבור A=B=0



השפעת שינוי **A**, **B** על הגרף



בציור הימני ניתן לראות כי לפונקציה f יש נקודת הטלאה ב- x=2, וכי אכן בפרמטרים השרירותיים שבחרנו הגבול בנקודה 2 אינו מוגדר שכן הגבול השמאלי בנקודה זו שונה מהימני.
בציור השמאלי מודגם כיצד שינוי הפרמטרים B,A משפיעים על הגרף. שינוי B פשוט מזיז ערך הפונקציה בנקודה 2 עצמה, ושינוי A מזיז את כל חלק הפונקציה מימין לנקודה 2 בקבוע.

ולשאלתנו - מתי יהיה לפונ' גבול בנקודה 2. כבר לפני חישוב התשובה ניתן לספק את האבחנה הבאה: <u>קיום הגבול בנקודה 2 אינו תלוי בפרמטר B</u>. הפרמטר B משפיע על ערך הפונ' בנקודה 2 עצמה, בעוד אנו זוכרים כי לעניין סוגיית הגבול של פונקציה בנקודה מסוימת ערך זה אינו רלוונטי – אנו מתעניינים רק בהתנהגות הפונקציה "מסביב" לנקודה.

כדי שיהיה קיים הגבול, חייב להתקיים שהגבול הימני בנקודה 2 יהיה שווה לגבול השמאלי.
המשפט שלמדנו בתחילת שיעור 2 מבטיח גם שזהו תנאי מספיק לכן ל- f יש גבול בנקודה אם"ם:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$$

כעת, משמאל לנקודה 2 הפונקציה f מוגדרת ע"י x^2+3, ומימין ע"י $2x+A$ לפיכך:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x^2+3 \underset{\substack{\text{פולינום}\\ \text{רציף}}}{=} 2^2+3 = 7$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 2x+A \underset{\substack{\text{פולינום}\\ \text{רציף}}}{=} 4+A$$

ולכן צריך להתקיים $4+A=7$, היינו $A=3$, ולכן התשובה הסופית לסעיף זה:
הגבול של f בנקודה 2 קיים עבור $\boxed{A=3\ ;\ \text{כל } B}$

<u>נכליל את התהליך שביצענו, ונקבל את הטכניקה הבאה לחישוב גבול של פונקצית הטלאה:</u>

כשאנו מתעניינים בגבול של פונ' מוטלאת בנקודת ההטלאה, נפריד את חישוב הגבול לחישוב כל אחד מהגבולות החד צדדיים. תחת הפרדה זו, חישוב הגבול חד צדדיים "מתרגם" לחישוב הגבול של פונ' "רגילות" שהן הנוסחות שמגדירות את ההטלאה בכל אחד מהטלאים.

אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה – הגבול הדו צדדי קיים ושווה להם.
אם הגבולות החד צדדיים לא קיימים או שונים זה מזה – הגבול הזו צדדי לא קיים. ■

<u>סעיף ב'</u>: ראשית נשים לב שהנקודה היחידה שעשויה להוות בעיה לרציפות הפונקציה f היא הנקודה $x=2$. לכל נקודה אחרת, f "יורשת" את הרציפות מרציפות כל אחד מהטלאים שלה. באופן יותר מפורט נגיד:

עבור $x>2$, $f(x)$ מוגדרת ע"י $2x+A$ שהיא פונקציה רציפה. לפיכך לכל $x>2$, אם נסתכל "מספיק קרוב" סביב x הפונקציה $f(x)$ תהיה זהה לפונקציה (הרציפה) $2x+A$ ולכן f רציפה בה. באופן דומה, עבור $x<2$, f מוגדרת ע"י הפונקציה הרציפה x^2+3 ולכן רציפה.

לכן נותר לנו רק לבדוק את הנקודה 2. (את השיקול הנ"ל לא ניתן להפעיל בנקודה 2, שכן בכל סביבה של 2 שנסתכל, לא משנה כמה קטנה, f תהיה "מישמש" של 2 הנוסחאות)

אם כך מתי f תהיה רציפה בנקודה 2? נבדוק את 3 התנאים לרציפות:

1. f מוגדרת בנקודה 2 ← מתקיים תמיד
2. הגבול $\lim_{x\to 2} f(x)$ קיים ← זה בדיוק מה שחישבנו ב-א': $\boxed{A=3\ ;\ \text{כל } B}$
3. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ← נחשב את 2 האגפים: $f(2)=B$, אגף ימין $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$
   (זה היה הגבול בסעיף א' עבור הערך החוקי A=3)
   לפיכך נקבל את התנאי $B=7$.

למעשה לקחנו את המקרה של סעיף א' בו "חיברנו" את הטלאי הימני והשמאלי של f, ו"העלינו" את הנקודה B למקום המפגש של הטלאים ליצירת קו אחד רציף.

<u>סה"כ קיבלנו</u> את התנאי $A=3;\ B=7$ ■

תרגיל 2

הוכח כי הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^2}{|2+\sin x|}$ רציפה ב- **R**.

פתרון 2

דרך נפוצה בהוכחת רציפות של פונקציה כזו, היא ע"י המשפטים בפרק 2.7.
משפטים אלה מספקים לנו ראשית "**אבני בניין**": פונקציות ומשפחות של פונקציות שאנו יודעים שהן רציפות – פולינום, פונקציות טריגונומטריות, ערך מוחלט, $\sqrt{x}$ (עבור $x\ge 0$) וכו'...
ושנית - ה"**מלט**" בעזרתו נחבר את אבני הבניין, הם משפטי האריתמטיקה לגבי סכום, הפרש, כפל חילוק והרכבה של פונקציות רציפות.

נדגים את תהליך הבנייה בתשובה לשאלתנו:

$f(x)=\dfrac{2x^2}{|2+\sin x|}$ היא **מנה** של 2 פונקציות, לכן ע"פ משפט **2.7.3ד'** כדי להראות שהיא רציפה מספיק להראות: <u>מונה רציף ומכנה רציף ושונה מ- 0</u>.

<u>מונה רציף</u>: $2x^2$ פולינום לכן רציף לכל x.

<u>מכנה רציף</u>: $|2+\sin x|$. את רציפות הביטוי $2+\sin x$ נמק ע"פ **2.7.3א'**: זהו סכום של פונ' קבועה (רציפה) עם פונ' sin (רציפה), אך כיצד נתמודד עם הערך המוחלט?
ובכן הפונקציה שלנו היא "ערך מוחלט **של** 2+sin(x)". עצם ההגיה הזו מרמזת כי ניתן להסתכל על הפונקציה <u>כהרכבה</u> של 2 פונקציות: פונ' הערך המוחלט – |x| **מורכבת על** הפונקציה 2+sin(x).
ע"פ משפט **2.7.6** הרכבה של 2 פונקציות הרציפות לכל x, רציפה אף היא לכל x, ומכאן $|2+\sin x|$ רציפה לכל x.

נותר עדיין להראות <u>מכנה שונה מ- 0</u>: כאן ניזכר בעובדה השימושית $-1\le \sin x\le 1$ ונקבל:

$$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow 1\le \sin x+2\le 3 \Rightarrow \sin x+2\ne 0 \Rightarrow |\sin x+2|\ne 0$$

כנדרש ■

בתרגילים הבאים נתייחס למספר טענות "הוכח או הפרך". בשאלות "הוכח או הפרך" עלינו להחליט תחילה אם הטענה נכונה או אינה נכונה. במידה שהטענה נכונה עלינו לספק הוכחה שלה, ובמידה שאינה נכונה ניתן <u>דוגמה נגדית</u> למקרה בו הטענה אינה מתקיימת.

תרגיל 3

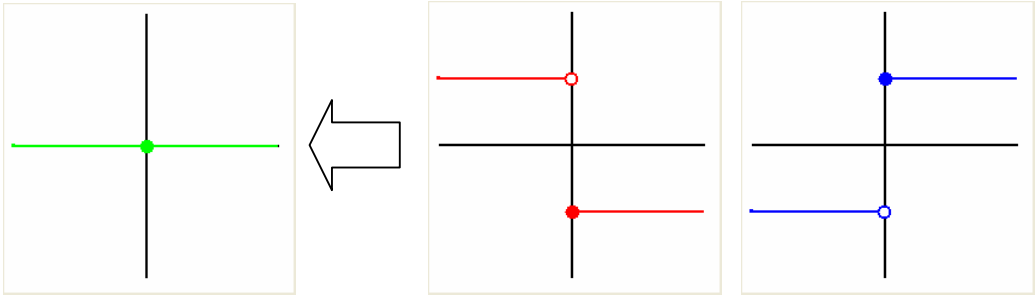
הוכח או הפרך:
אם f,g אינן רציפות בנקודה 0, אז f+g אינה רציפה ב- 0.

פתרון 3

ראשית ניזהר לא להתבלבל בשל משפט דומה שאנו מכירים. אנו יודעים כי אם f,g רציפות בנקודה 0, אז f+g רציפה ב- 0. אך משפט זה עובד <u>רק בכיוון אחד</u> לפיכך לא ניתן להסיק ממנו כי מכך ש- f,g אינן רציפות בנקודה 0 כי פונקצית הסכום אינה רציפה.

ואכן אחרי מעט מחשבה ניווכח כי **הטענה אינה נכונה**. נוכל לבנות זוג פונקציות לא רציפות כך שאי-הרציפויות שלהן "יבטלו זה את זה" כשנסכום אותן.

ניקח למשל $f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$, הפונקציות f,g בברור אינן רציפות בנקודה 0, אך סכומן $(f+g)(x)=0$ הוא הפונקציה הקבועה 0, שהיא רציפה לכל x ובפרט ב- 0.



$(f+g)(x)$ $\quad$ $g(x)$ $\quad$ $f(x)$

תרגיל

הסטודנט מתושפליל בר-זיכרוני הבין אף הוא כי הטענה בתרגיל 3 אינה נכונה וענה כך:

" הטענה אינה נכונה. ניקח $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$. f,g אינן רציפות בנקודה 0, אך הפונקציה $(f+g)(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ היא הפונקציה הקבועה 0, שהיא רציפה לכל x ובפרט ב- 0."

מהי הבעיה בדוגמה שנתן מתושפליל? כיצד ניתן לתקן אותה?

■

תרגיל 4

הוכח או הפרך:
אם f רציפה ב- 0, g אינה רציפה ב- 0, אז f+g אינה רציפה ב- 0

פתרון 4

במקרה זה, ה"טריק" שעשינו בתרגיל 3 כבר לא יעבוד, כיוון שנראה שלא נוכל "לתקן" את אי הרציפות של הפונקציה g אם נחבר אליה פונקציה רציפה. לאחר מספר ניסיונות כושלים למצוא דוגמה נגדית, נתחיל לחשוד כי **הטענה נכונה**. כעת כיצד נוכיח זאת?

השיטה האלגנטית (וכמעט היחידה) להוכיח את טענתינו היא **הוכחה בדרך השלילה**.
המבנה הכללי של הוכחה בדרך השלילה הוא זה:

שלב 1: הנחת השלילה
נניח כי הטענה שאנו רוצים להוכיח אינה נכונה.

שלב 2: הגעה לסתירה
נפעל ב"עולם" בו אנו מניחים שהטענה אינה נכונה, וע"י שימוש במשפטים ידועים נגיע ל**סתירה פנימית**.

שלב 3: חגיגות הנצחון
כיוון שבמתמטיקה אין סתירות, הרי זה שהגענו ע"י מהלכים מתמטיים חוקיים לסתירה, חייב היה להיגרם מכך שההנחה שהנחנו – הנחת השלילה – אינה נכונה. מכאן נסיק כי הטענה המקורית נכונה.

נראה כיצד נוכיח את טענתינו בדרך השלילה במקרה זה. ראשית ננסח את הנחת השלילה

<u>הטענה שאנו רוצים להוכיח:</u>

לכל 2 פונקציות f,g:
אם f רציפה ב- 0, g אינה רציפה ב- 0,
אז f+g אינה רציפה ב- 0.

<u>הנחת השלילה:</u>

קיימות פונקציות f,g המקיימות:
f רציפה ב- 0, g אינה רציפה ב- 0,
ובכל זאת f+g רציפה ב- 0

במילים אחרות, כיוון שאנו רוצים להוכיח משפט שצריך להיות נכון לכל 2 פונקציות, הנחת השלילה היא ש<u>קיימות</u> פונקציות המקיימות את תנאי המשפט אך לא מקיימות את מסקנתו (ובמילים אחרות אחרות: אנו מניחים בשלילה ש"יש דוגמה נגדית" לטענה, ואם נראה שמצב זה לא ייתכן הרי בהכרח טענתנו נכונה תמיד)

אם כך, הוכחתינו תתחיל כך:

נניח בשלילה כי קיימות פונקציות f,g המקיימות:
f רציפה ב- 0
g אינה רציפה ב- 0
ובכ"ז f+g רציפה ב- 0 . . .

כעת עלינו "לעבוד" בעולם הנחת השלילה, וע"י שימוש במשפטים או חישובים שונים לנסות להגיע לסתירה פנימית. המשפט הרלוונטי שאנו מכירים על פונקציות רציפות הוא משפט האריתמטיקה המדבר על סכום, הפרש, כפל ומנה של שתי פונקציות רציפות.
ב"עולם" שלנו יש 3 פונקציות: f,g,f+g, השתיים ה"רלוונטיות" לשימוש במשפט הן דווקא f ו- f+g שכן אלה הם 2 הפונקציות שאנחנו יודעים\מניחים שהן רציפות. אחרי עוד קצת מחשבה נמשיך את הוכחתנו כך:

. . . כיוון ש- f רציפה ב- 0, f+g רציפה ב- 0,
אז ע"פ משפט 2.7.3ב' נקבל כי $(f+g)-f=g$ רציפה ב-0 . . .

ע"י שימוש במשפט מתמטי פשוט ב"עולם השלילה" שלנו קיבלנו כי g רציפה ב- 0, ומאידך בעולם שלנו אנו יודעים כי g אינה רציפה ב- 0. **הגענו לסתירה**. וממה הסתירה? ובכן יש "2 אפשרויות":

<u>אפשרות 1</u>

עלינו על תגלית מדהימה: סתירה פנימית במתמטיקה. כל ענפי המתמטיקה קורסים כמגדל קלפים אחד אחרי השני, פקולטות למתמטיקה נסגרות ברחבי העולם, צוות הקורס מאבד את משרתו ופותח דוכן לחצילים מטוגנים בשכונת התקווה.

<u>אפשרות 2</u>

הסתירה נובעת מכך שההנחה שלנו אינה נכונה. במקרה זה הדבר בעצם מוכיח את נכונות הטענה, סיימנו את התרגיל, ואפשר לקחת הפסקה ולהכין לעצמנו חציל מטוגן.

ועכשיו ברצינות – מן הסתם הסתירה נובעת מכך שהנחת השלילה אינה נכונה, ובכך סיימנו את ההוכחה:

. . . קיבלנו כי g רציפה ב- 0, בסתירה להנחתנו כי g אינה רציפה, לפיכך הנחת השלילה אינה נכונה, ומכאן נסיק את נכונות הטענה. ■

תרגיל 5

הוכח או הפרך:
אם f רציפה ב- 0, g אינה רציפה ב- 0, אז f·g אינה רציפה ב- 0

פתרון 5

במבט ראשון, טענה זו נראית דומה להפליא לטענה שהוכחנו בתרגיל הקודם. טבעי אם כך שננסה לחקות את תהליך ההוכחה שם. אם זאת, כשנעשה זאת, צפויה לנו הפתעה לא נעימה:

<u>פתרון התרגיל הקודם</u>

נניח בשלילה כי קיימות פונקציות f,g המקיימות:
f רציפה ב- 0
g אינה רציפה ב- 0
ובכ"ז f+g רציפה ב- 0

כיוון ש- f רציפה ב- 0, f+g רציפה ב- 0,
אז ע"פ משפט 2.7.3ב' נקבל כי
$(f+g)-f=g$ רציפה ב-0
בסתירה להנחה

<u>(ניסיון ל)פתרון התרגיל הזה</u>

נניח בשלילה כי קיימות פונקציות f,g המקיימות:
f רציפה ב- 0
g אינה רציפה ב- 0
ובכ"ז f·g רציפה ב- 0

כיוון ש- f רציפה ב- 0, f·g רציפה ב- 0,
אז... **נרצה להגיד:** ע"פ משפט 2.7.3ד' נקבל כי
$\frac{f\cdot g}{f}=g$ רציפה ב-0 . . .

. . . אך למשפט 2.7.3ד' יש תנאי נוסף והוא שהפונקציה במכנה שונה מ-0.

כלומר ניסיון ההוכחה שלנו נתקע, אך דווקא ניסיון כושל זה יכול לתת לנו כיוון לפתרון התרגיל. הנקודה בה "נתקעה" ההוכחה שלנו היא מהותית – שכן **הטענה אינה נכונה**, וקיבלנו גם כיוון לחפש את הדוגמה הנגדית:

ניקח $f(x)=0$ פונקצית האפס, ו- $g(x)=\begin{cases}-1 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ (או כל פונקציה אחרת לא רציפה ב- 0 שמוגדרת שם), ונקבל: f רציפה ב- 0, g אינה רציפה ב- 0 ו- f·g היא כמובן גם פונקצית האפס ולכן רציפה ב- 0.

■

תרגיל

בדיוק אחת מהטענות הבאות נכונה. מהי? מצאו דוגמאות נגדיות להפריך את יתר הטענות, ואם תרצו הוכיחו גם את הטענה הנכונה.

א. אם $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$ ו- $g(x)\ne 0$ לכל x, אז $\lim_{x\to 0+}(fg)(x)=\infty$ או $-\infty$
ב. אם $\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty$ ו- $g(x)\ne 0$ לכל x, אז $\lim_{x\to \infty}(fg)(x)=\infty$ או $-\infty$
ג. אם $\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty$, $g(x)$ רציפה ו- $g(x)\ne 0$ לכל x, אז $\lim_{x\to \infty}(fg)(x)=\infty$ או $-\infty$
ד. אם $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $g(x)$ רציפה ו- $g(x)\ne 0$ לכל x, אז $\lim_{x\to 0+}(fg)(x)=\infty$ או $-\infty$

■

★ **אתגר**

פונקצית הערך השלם המסומנת כך: $f(x)=[x]$, היא הפונקציה המתאימה לכל מספר x את המספר השלם הגדול ביותר, הקטן או שווה ל- x. כך לדוגמה:

$$[1.3]=1;\ [10.9]=10;\ [-2.7]=-3;\ [4]=4;\ [0.6]=0;$$

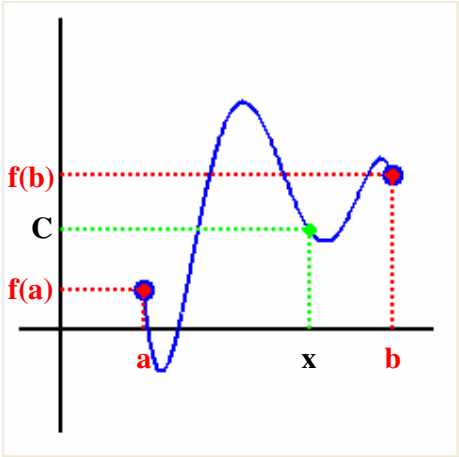
א) לאילו ערכי x פונקצית הערך השלם רציפה, ולאילו אינה רציפה? הוכיחו.
ב) מצאו פונקציה המקיימת $g(x)\neq 0$ לכל x כך ש- $(f\cdot g)(x)$ רציפה **לכל x>1.**
ג) האם קיימת פונקציה המקיימת $g(x)\neq 0$ לכל x כך ש- $(f\cdot g)(x)$ רציפה **לכל x?** נמקו
ד) מצאו α עבורה הפונקציה $[x]\cdot\sin(\alpha x)$ רציפה לכל x.

■

משפט ערך הביניים

משפט ערך הביניים (**יחידות הלימוד עמ' 132-131**) מופיע בקצרה ביחידות הלימוד, אך ללא ספק הוא המשפט המרכזי המוצג בפרק 2.
משפט 2.7.9 הוא גירסתו הכללית של משפט ערך הביניים, ובמשפט 2.7.10 מנוסחת מסקנה ממשפט ערך הביניים, שהיא מקרה פרטי שימושי של המשפט – למעשה כה שימושי שגם כשנשתמש במסקנה זו, נרגיש חופשיים להתיחס אליה כ"משפט ערך הביניים" בכבודו ובעצמו.

משפט 2.7.9	**משפט 2.7.10**
אם f פונקציה רציפה בקטע [a,b]	**אם** f פונקציה רציפה בקטע [a,b]
ו- C מספר כלשהו בין f(a) ל- f(b)	ול- f(a) ו- f(b) סימנים מנוגדים
אז קיים לפחות x אחד בקטע [a,b]	**אז** למשוואה f(x)=0 קיים לפחות
עבורו f(x)=C	פתרון אחד בקטע (a,b)



המשפט הוא ניסוח פורמלי של רעיון לא מסובך: פונקציה רציפה בקטע מסוים **[a,b]** ה"מתחילה" מערך מסוים בנקודה a **(f(a))**, ו"מסתיימת" בערך מסוים בנקודה b **(f(b))** חייבת "לעבור בדרך" דרך כל ערך **C** שבינהם (לפחות פעם אחת).
המשפט השני הוא תוצאה ישירה: פונקציה שבקצוות הקטע מקבלת ערכים עם סימנים מנוגדים חייבת "לעבור בדרך" באפס.

שימו לב לניואנס בין 2 הניסוחים: במשפט השני מובטח לנו כי נקבל אפס בתוך הקטע הפתוח (a,b) (שכן מהנתון שלקצוות סימנים מנוגדים, נקבל שאינם אפס לכן הפתרון לא מתקבל בקצוות)

נדגיש כי המשפט תקף אך ורק לפונקציות רציפות, כפי שתדגימו בתרגיל הבא:

תרגיל

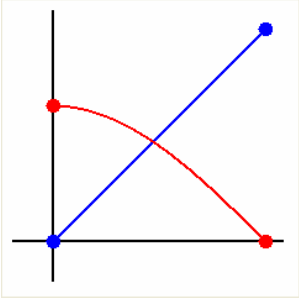
הדגימו פונקציה המקיימת f(0)=1, f(1)=3 שאינה עוברת בדרך בנקודה 2.
מן הסתם הדוגמה תהיה חייבת להיות של פונקציה לא רציפה.

■

תרגיל 6

הוכח כי למשוואה $x = \cos x$ יש פתרון בקטע $(0, \pi/2)$

פתרון 6



באיור מוצגות הפונקציות **x** ו- **cos(x)** בקטע $(0, \pi/2)$.
ברמת האינטואיציה, יש לנו 2 פונקציות רציפות – האחת עולה מ- 0 ל- $\pi/2$ והשניה יורדת מ- 1 ל- 0. טבעי אם כך שהן חייבות להיחתך בדרך, והשיקולים לכך הם ברוח משפט ערך הביניים.

אך חשוב להדגיש הטיעון שלהלן איננו הוכחה פורמלית. כדי להוכיח זאת באופן פורמלי, עלינו לנסח את טיעונינו תוך שימוש מדויק במשפטים. שימו לב כי אין לנו אף גרסה של משפט ערך הביניים שמדברת על 2 פונקציות או על חיתוכים שלהם..

כיצד תיראה ההוכחה הפורמלית של הטענה שלנו? ובכן אחרי העברת אגפים פשוטה על המשוואה שלנו נקבל: $x - \cos x = 0$ וכעת נסתכל על משפט 2.7.10:

משפט 2.7.10	צריך להוכיח
אם f פונקציה רציפה בקטע [a,b]	
ול- f(a) ו- f(b) סימנים מנוגדים	...
אז למשוואה f(x)=0 קיים לפחות	למשוואה x - cos x =0 קיים לפחות
פתרון אחד בקטע (a,b)	פתרון אחד בקטע (0,π/2)

מה שאנחנו צריכים להוכיח זהה ל"אז" של משפט 2.7.10, כאשר "בתפקיד" f(x) הפונקציה $x - \cos x$ בתפקיד a – 0, ובתפקיד b - $\pi/2$.

אם כך נותר לנו לפיכך רק להוכיח כי מתקיימים תנאי משפט 2.7.10 עבור הטרויקה הנ"ל וסיימנו. ואכן -

הוכחה תהי $f(x) = x - \cos x$. f רציפה בקטע $[0, \pi/2]$ כהפרש של פונקציות רציפות $(x, \cos x)$. כמו כן מתקיים:

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f(\pi/2) = \pi/2 - \cos(\pi/2) = \pi/2 > 0$$

כלומר ל- $f(\pi/2), f(0)$ סימנים מנוגדים. לפיכך ע"פ משפט ערך הביניים קיים פתרון למשוואה $x - \cos x = 0$ בקטע $(0, \pi/2)$ כנדרש ■

תרגיל 7

הוכח כי לפונקציה $f(x)=x^2+\frac{1}{x}-10$ יש לפחות שלושה שורשים.

פתרון 7

אנו צריכים להראות שיש לפחות 3 פתרונות למשוואה $f(x)=x^2+\frac{1}{x}-10=0$. משפט ערך הביניים (2.7.10) מבטיח לנו, שאם בקטע מסוים f רציפה ובקצוות הקטע מקבלת סימנים מנוגדים, אז יש פתרון למשוואה $f(x)=0$ בקטע. לכן אסטרטגיה הגיונית תהיה לזהות 3 נקודות של "התחלפות" סימן של הפונקציה f(x) בין נקודות בהן היא רציפה, ומזה נסיק קיומם של לפחות 3 פתרונות כנדרש.

עובדה <u>שחשוב מאד</u> לשים לב אליה לגבי f שלנו היא כי <u>f אינה רציפה בנקודה 0</u>. כך שבמקרה של f איננו יכולים "להפעיל" את משפט ערך הביניים על קטעים המכילים את 0.

מכאן בעזרת קצת ניסוי, תעיה, ושכל בריא נוכל להשיג את "סט הנקודות" הדרוש כדי לקבל את חילופי הסימן. בתחילת הניסוי והתעיה ייטב אם נציב ערכים ש"קל" להציב, למשל נתחיל כך:

$f(1)=1+1-10=-8<0$

כלומר $f(0)$ שלילי. כעת נשאף למצוא נקודה נוספת בה f חיובי. מהתבוננות בביטוי ל- f(x) קל לראות כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. מכאן אם נציב x "גדול מספיק", בוודאי נקבל ערכי f חיוביים. ואכן, כבר עבור x=10 נקבל:

$f(10)=10^2+0.1-10=90.1>0$

קיבלנו:

$f(1)<0, f(10)>0$, f רציפה* ב- $[1,10]$ ← לפי משפט עה"ב קיים ל- f שורש x_1 בקטע $(1,10)$

(*את רציפות f לכל x שאינו 0 ננמק בצורה הרגילה ע"י אריתמטיקה)

נמשיך לתהות על התנהגות f - $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$ לכן שוב נצפה שאם נציב ערך חיובי קטן גם אז נקבל ערכי f חיוביים, כלומר התחלפות סימן בין נקודה זו לנקודה 1 בה f(1)=-8 כזכור.

נציב למשל $f(0.01)=0.01^2+1/0.01-10=90.0001$, ולפיכך

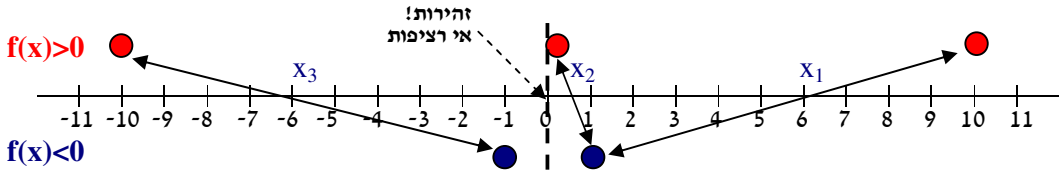
$f(1)<0, f(0.01)>0$, f רציפה ב- $[0.01,1]$ ← לפי עה"ב קיים ל- f שורש x_2 בקטע $(0.01,1)$

נעיר כאן שהצבת הנקודה ה"קרובה" ל- 0 היא צעד טכני כדי להתאים את ההוכחה שלנו לניסוח המשפט שיש לנו. עם זאת נקבל גם רישום שמשתמש במרומז ב"הרחבה אינסופית" של משפט ערך הביניים, על אף שזו לא מנוסחת כמשפט ביחידות הלימוד.

"מתקיים $f(1)<0$ ו- $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty>0$, וכן f רציפה ב- $(0,1]$ לכן קיים שורש בקטע $(0,1)$"

את השורש השלישי כבר נמצא ב"צד השלילי" של f, משיקולים דומים. הציבו והשתכנעו:

$f(-10)>0, f(-1)<0$, f רציפה ב- $[-10,-1]$ ← לפי עה"ב קיים שורש x_3 בקטע $(-10,-1)$



הראינו כי קיימים ל- f שלושה שורשים, שנמצאים בתחומים הזרים זה לזה (כל שורש מובטח להימצא בתחום אחר על ציר המספרים ללא חפיפה) – לפיכך אלה הם בהכרח שלושה שורשים שונים, והוכחנו את הנדרש. ■

תרגיל 8

תהי f פונ׳ רציפה, $f:[0,1]\to[0,1]$. הוכח כי יש נקודה בה $f(x)=x$.
רמז : השתמשו ב**פונקצית עזר** : $g(x)=f(x)-x$

פתרון 8

[לא הוקלד] - נפתור את התרגיל בתחילת השיעור הבא.

■

נסיים בעוד תרגיל אחרון דווקא בנושא רציפות –

תרגיל

- הוכח או הפרך : אם f(x) רציפה לכל x אז $f(x)^2$ רציפה לכל x.
- הוכח או הפרך : אם $f(x)^2$ רציפה לכל x אז f(x) רציפה לכל x.
- ענו על 2 הסעיפים הקודמים - עם חזקה שלישית.

■

סיימנו את החומר הדרוש לממ״ן 11